AZ 51. ORTVAY RUDOLF

FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI

2020. október 22 — november 2.

1. A betegségek terjedésnek leírására két fő irányvonal alakult ki (populációdinamikai, valamint ügynök-modellek). A populációdinamikai megközelítésben a társadalmat különböző csoportokra bontják aszerint, hogy az egyének a járvány mely szakaszában vannak éppen. Az egyes csoportokhoz tartozók számának időbeli változását közönséges, determinisztikus differenciálegyenletek segítségével vizsgálják. Ezen modellek közül az egyik legegyszerűbb az ún. SIS-modell. Itt az egyes betűk a Susceptible azaz „fogékony”, illetve Infectious, „fertőző” csoportokra utalnak. A második S azt jelzi, hogy a meggyógyult páciensek az S populációba, azaz fogékonyba, kerülnek és ismét elkaphatják ugyanazt a betegséget. Szemben a SIR-modellel, ahol a felgyógyultak immunisak (Recovered) lesznek a betegségre.

   Habár a modell a jelenlegi helyzet (COVID-19) leírására csak erős korlátokkal alkalmazható, hiszen még azt sem tudjuk biztosan, hogy a fertőzés ismét elkapható-e, a dinamikai viselkedésről kvalitatív képet mégis alkothatunk segítségével.

   Ennek érdekében vizsgáljuk numerikusan a SIS-modellt

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\frac{\beta SI}{N} + \gamma I,$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I,$$

   ahol S és I a megfelelő populáció aktuális létszáma, a β fertőzési ráta a terjedést leíró paraméter (annak valószínűsége, hogy egy egészséges egyén elkapja a betegséget egy már fertőzöttől), γ pedig a gyógyulási ráta (lényegében a betegség átlagos időtartamának reciproka). A teljes populáció N létszáma: $S + I = N$ állandó. Elemezzük különböző (β, γ) párokra a járvány lefolyását! Ha az $R = \beta/\gamma$ reprodukciós szám kezdetben nagyobb 1-nél, a fertőzöttek számának csökkentése érdekében bizonyos intézkedéseket szükséges bevezetni. Erre lehetőségünk van, ha a $\beta(t)$ fertőzési rátát időben változó paraméternek tekintjük (ezzel modellezve a hatósági vagy önkéntes karantént, távolságtartást, maszkviselést), pl. valamilyen sima, monoton csökkenő függvény formájában, melynek időskálája egybeeshet a betegség átlagos időtartamával, de lehet ettől 1–2 nagyságrenddel hosszabb is. Az intézkedést abban az esetben tekintjük sikeresnek, ha elértük az $R \approx 0.9$ értéket. Mutassunk numerikus megoldásokat a különböző forgatókönyvekre!

   (Kovács Tamás)

2. A klímaváltozás (egyéb más jelenségekkel együtt) ráterelte a figyelmet olyan fizikai rendszerekre, melyekben valamely paraméter időben eltolódik. A gerjesztett, csillapított harmonikus oszcillátor a fizika alappéldája, melyben a szinuszos gerjesztés a klímadinamikai megfeleltetésben az éves periodicitásnak felel meg, s az ismert állandó gerjesztési amplitúdójú eset változatlan klímának. Vizsgáljuk meg a klímaváltozás analógiájára azt az esetet, amikor a gerjesztési amplitúdó konstans értéktől indulva időben lineárisan változik (nő vagy csökken)! Ahogy a hagyományos esetben a hosszú idejű viselkedést egy állandósult periodikus mozgás (attraktor) jellemzi, most is létezik egy olyan oszcilláló mozgás, amihez a mozgás minden kezdőfeltétel esetén tart, amelynek amplitudója azonban ebben az esetben *időben változó*. Határozzuk meg ennek a rezgőmozgásnak a paramétereit és ábrázoljuk a mozgást! Megmarad-e a rezonanciára való hajlam a „klímaváltozás” során?

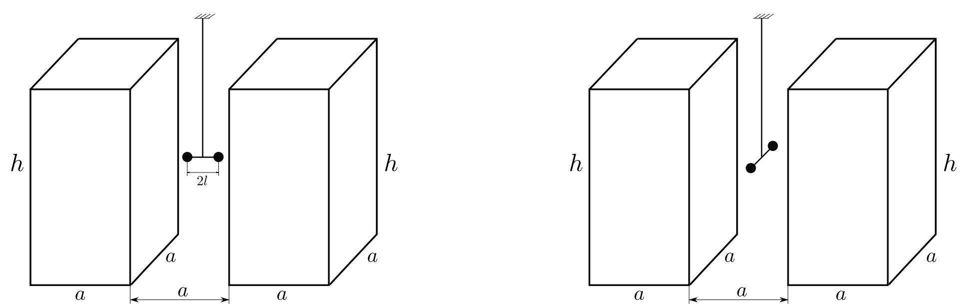
   (Jánosi Dániel és Tél Tamás)

3. Eötvös Loránd egyik korai kísérletében dinamikus módszerrel mérte meg a gravitációs állandót. Két egyforma, négyzet alapú derékszögű ólomhasábot úgy helyezett el, hogy a szemben lévő lapjaik párhuzamosak legyenek, távolságuk pedig megegyezzen a hasábok alapjainak $a = 30$ cm oldalhosszával (lásd a mellékelt ábrát). A hasábok magassága $h = 2a$ volt. A két ólomhasáb közt így létrejött szabad térbe úgy helyezte el a torziós ingát, hogy az ingarúd középpontja pontosan középen legyen a két ólomhasáb között. Az elhanyagolható tömegű és kiterjedésű rúd két végére egy-egy azonos tömegű golyót helyezett. Az inga $2l$ hosszúságú rúdját (nyilván $l < a/2$) közepén egy függőleges torziós szálhoz erősítette, és így a rúd vízszintes síkban torziós lengéseket végezhetett. Az elrendezésben az inga két egyensúlyi helyzete körüli kis elfordulási szögek mellett mérte a lengésidőt.
Legyen a rúdnak a hasábok szemközti oldalaira merőleges egyensúlyi helyzete körüli (bal oldali ábra), transzverzális lengésidő T_t, míg a rúdnak a szemközti oldalakkal párhuzamos beállása körüli (jobb oldali ábra), longitudinális lengésidő T_l! Itt jegyezzük még, hogy a korabeli méréseknél a napjainkban szokásos periódusidőnek a felét tekintették lengési időnek. Elméleti számításai alapján Eötvös az alábbi összefüggéssel határozta meg az f gravitációs állandót:

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = \frac{13{,}427}{\pi^2} f \varrho \, (1 - \varepsilon),$$

ahol ϱ a homogén ólomtömbök anyagának sűrűsége, míg ε a rúd méreteitől függő és az oszlopok véges voltából eredő korrekciós tagot jelent. Mutassuk meg, hogy a képletben szereplő numerikus érték nem függ a hasábok méretétől, csak a hasáb oldaléleinek h/a arányától (ami adott), de függ az inga rúdjának hosszától! Ugyanakkor legjobb tudomásunk szerint Eötvös egyik cikkében sincs utalás az l értékére. Ezért felvetődik a kérdés: milyen l esetén kapjuk a fenti képletben szereplő 13,427 számot? Hogyan függ a képletben megjelenő numerikus érték az l hosszúság értékétől az $0 < l < a/2$ intervallumban?

Megjegyzés: Eötvös Loránd tervezte a mérés még pontosabbá tételét is, amikor a kísérletet „a megbízhatatlan ólomhasábok helyett valóban homogén higannyal” és légüres térben végezné el, erre azonban már nem került sor.



(Cserti József)

4. Tekintsük a következő rendszert: Különböző tömegű testek kezdetben nyugszanak. Az egyik, M tömegű testet V_1 sebességgel függőlegesen felfelé hajítja egy gépezet. Amikor a test visszatér a kiindulási magasságához V_1' sebességgel, a gépezet a teljes mozgási energiáját átadja egy $M/\sqrt{1{,}1}$ tömegű testnek, szintén függőleges irányba hajítva. A jelenség megismétlődik, a mozgási energia mindig $\sqrt{1{,}1}$-szer kisebb tömegű testnek lesz átadva.

A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos nagyságú. A kezdeti V_1 sebesség éppen az első testre vonatkozó, négyzetes közegellenállás melletti szabadesés V_∞ „aszimptotikus sebességének” nagyságával egyezik meg.

Adjuk meg az $N = 101$ -es indexű test V_{101}' sebességét a visszatérés pillanatában!

(Gombkötő Ákos)

5. Megmértük egy szoba hőmérsékletét, mialatt egyenletesen fűtöttünk maximális teljesítménnyel, és egy másik alkalommal kikapcsolt fűtés mellett. Az eredményeket a mellékelt táblázat tartalmazza.

   A fűtés ideje alatt a külső hőmérséklet állandó 7,4 °C volt, míg a hűlési esetben 2,8 °C. A szoba falainak (mennyezetének és padlójának összesen) 50 %-a a szomszédos lakásokat választja el a szobától, amelyekben a hőmérséklet állandó volt. A falak többi 50 %-a külső fal. Kérdések:

   1) Magyarázza meg kvalitatívan a két görbe alakját az idő függvényében ábrázolva!

   2) Illesszen megfelelő függvényeket az adatokra! Mi az illesztési paraméterek fizikai jelentése?

   3) Mekkora volt a szomszédok lakásaiban a hőmérséklet?

   4) A fűtési görbe esetén a fűtőteljesítmény állandó volt, és a fűtés költsége ebben az időintervallumban 350 Ft volt. Általában ezt a szobát hasonló külső hőmérséklet mellett 20 °C fokos állandó hőmérsékleten tartjuk. Mennyibe kerül a fűtés havonta?

   5) Mekkora a maximálisan fenntartható hőmérséklet ebben a szobában, ha a fűtést állandóan bekapcsolva tartjuk, ugyanazzal az állandó teljesítménnyel, amelyet a mérés alatt használtunk, ha a külső hőmérséklet 0 °C?

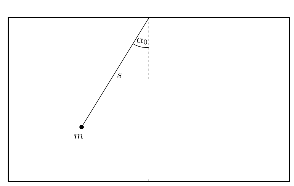
   6) A 2,8 °C külső hőmérséklet mellett a szobát minden nap x órán át termosztát-szabályozással fűtjük, és $24 - x$ órán át hagyjuk hűlni, ahol $0 < x < 24$. Amikor fűtünk, akkor egy szokásos termosztát ki- és bekapcsolja a fűtést, melyet 20 °C-ra állítunk be. Mennyi lesz a havi fűtésszámlánk x függvényében az $x = 24$ esethez képest? Készítsünk ábrát!

   7) Tegyük fel, hogy a külső hőmérséklet időben szinuszosan változik, egynapos periódusidővel! Ekkor a belső hőmérséklet is szinuszosan fog változni az időben, csak kisebb amplitúdóval és egy fáziskéséssel. Hányszor kisebb amplitúdóval, és mekkora fáziskéséssel?

   (Veres Gábor)

6. A manapság használatos felmosóvödrök egy része tartalmazza a rongy kicsavarását lehetővé tevő feltétet is:

   Tömegeloszlásuk ezért nem szimmetrikus. Ha az üres vödröt felfüggesztjük, akkor annak felső éle a vízszintessel α_0 szöget zár be. Modelezzük a vödröt egy $30 \times 25 \times 25$ cm-es téglatesttel, melynek súlypontja a felső vízszintes él középpontjától $s = 15$ cm-re van a függőlegessel $\alpha_0 = 0,16$ radiánt bezáró szögben:



   Mekkora a felső él középpontjában felfüggesztett vízzel töltött $m = 75$ dkg tömegű vödör vízszintessel bezárt α szöge, ha a vödör magasabban fekvő „függőleges” éle mentén a víz magassága h cm? Mekkora h vízmagasság esetén tekinthető a töltött vödör helyzete egy század radiánnyi pontossággal vízszintesnek? Ahol szükséges, használjuk ki, hogy α kicsi!

   (Tél Tamás)

7. Az $m\ddot{x} = F(t)$ Newton-egyenlet (ahol $F(t)$ csak a t időtől függ) megoldását felírhatjuk integráloperátorral

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')\, F(t')\, dt'$$

alakban. Határozzuk meg az integráloperátor $G(t-t')$ magfüggvényét!

(Tichy Géza)

8. Két, m_1 és m_2 tömegű, Θ_1 és Θ_2 tehetetlenségi nyomatékú gömbölyű égitest kering körpályán közös tömegközéppontjuk körül, távolságuk R, ami sokkal nagyobb a testek méreténél. Mindkét égitest forgástengelye merőleges a keringés síkjára, a forgás szögsebessége ω_1, illetve ω_2, mindkettő nagyobb a keringés Ω szögsebességénél.

Hosszú eónok elteltével a két égitest már teljesen kötött keringést végez, azaz mindkettő tartósan ugyanazt az oldalát fordítja a másik felé.

A rendszer kezdeti mechanikai energiájának hányad része disszipálódott az árapályfűtés hatására a teljesen kötött keringés beálltáig? Adjunk választ elsőrendű közelítésben! Feltehetjük, hogy a rendszer elszigetelt, a külvilággal sem energia-, sem impulzusmomentum-cserét nem folytat. A testek az egész folyamat során végig kör alakú pályán keringenek.

(Dávid Gyula)

9. Vizsgáljuk meg részletesebben a kötött keringés kialakulásának folyamatát! Egy bolygó körül egyetlen hold kering R sugarú körpályán. A hold forgástengelye merőleges a keringés síkjára, a forgás kezdeti ω szögsebessége jóval nagyobb a keringés Ω szögsebességénél. A bolygó M tömege sokkal nagyobb a hold m tömegénél, és tételezzük fel, hogy a bolygó alakja nem szenved számottevő torzulást a hold gravitációs hatása következtében. A holdat ellenben háromtengelyű ellipszoiddá torzítja az árapály hatása, miközben térfogata változatlan marad. A hold anyagának sűrűségeloszlását homogénnek tekinthetjük.

A holdon kialakuló dagályhullám nem pontosan a vonzást kifejtő bolygó irányába mutat, ahhoz képest kis szögű késést mutat. A folyamat bonyolult rugalmasságtani és szilárdtestfizikai részleteinek vizsgálata helyett éljünk egy egyszerű közelítéssel: tételezzük fel, hogy a dagályhullám kialakulása fix τ késleltetési idővel követi a gravitációs hatást. A τ időállandó jóval rövidebb, mint a hold forgásából adódó „holdnap” hossza. Hasonló egyszerűsítésként feltételezhetjük azt is, hogy a dagályhullám amplitúdója arányos a bolygó által a holdra kifejtett árapályerő nagyságával (ami $1/R^3$ alakban függ a távolságtól).

a) Írjuk fel a hold forgási szögsebességének változására vonatkozó differenciálegyenletet úgy, hogy a folyamat közben a bolygótól való távolságot és a keringés szögsebességét állandónak tételezzük fel! Oldjuk meg a differenciálegyenletet!

b) Most vegyük figyelembe azt a jelenséget is, hogy a dagályhullámra ható forgatónyomaték következtében megváltozik a hold keringésének pályasugara és ezért a keringés szögsebessége is! Írjuk fel a hold forgásának ω és keringésének Ω szögsebességére vonatkozó csatolt differenciálegyenlet-rendszert! Az Ω változót kiküszöbölve és megfelelő paramétereket bevezetve vezessük le a csak a forgás ω szögsebességét tartalmazó egyetlen differenciálegyenletet! (Megoldani nem kell.) Vizsgáljuk meg, milyen feltételekkel kapjuk vissza ebből az a/ feladatrészben tárgyalt (és megoldott) differenciálegyenletet!

c) Vázoljuk fel az általánosabb problémát is! Legyen most a két test tömege összemérhető. Mind a hold, mind a bolygó anyaga deformálható, de a deformáció kialakulására jellemző τ_1 és τ_2 késleltetési idők különböznek. A két testben kialakuló dagályhullámok amplitúdója arányos a testek közt ható vonzóerővel, de az arányossági tényezők különböznek. A bolygó és a hold forgástengelye párhuzamos, és merőlegesek a keringési síkra. Kezdeti forgási szögsebességük ω_1, illetve ω_2, mindkettő nagyobb a keringés Ω szögsebességénél. Írjuk fel az $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ és $\Omega(t)$ függvényekre vonatkozó csatolt differenciálegyenlet-rendszert! (Megoldani nem kell.)

(Gohér Attila és Dávid Gyula)

10. **Elnézést kérünk, a 10. feladatot visszavontuk. (Október 26, 19:52 CET)**

11. A villámlás utáni dörgés egy nagy csattanással kezdődik, majd ezt egy hosszú, mély hangú morajlás követi. Magyarázzuk meg ezt a hullámterjedés alapján!

(Tichy Géza)

12. Tekintsük úgy, hogy a Föld magja R sugarú, homogén ρ_m sűrűségű merev gömb, melyet ρ sűrűségű folyadék vesz körül! Tegyük fel, hogy a gömb tömegközéppontja egyensúlyi helyzetben a Föld geometriai középpontjában van! Írjuk fel a mag mozgásegyenletét kis kitérésekre vonatkozólag!

(Gombkötő Ákos)

13. Egy asztalon fekvő két egyforma, pontszerű mágneses rúd mágneses dipólusmomentumai az asztal síkjában, és a) az őket összekötő egyenesre merőlegesen, egymáshoz képest ellentétes irányban, illetve b) az őket összekötő egyenessel párhuzamosan, egymáshoz képest azonos irányban állnak. Az egyik mágnesrúd rögzített, a másik pedig súrlódás nélkül mozoghat az asztalon. A mozgás során a mágneses dipólusok iránya végig változatlan. Mennyi idő alatt éri el a mozgó mágneses rúd a rögzített mágnest a két rúd közötti vonzóerő hatására? Tegyük fel, hogy a két rúd közötti kölcsönhatás mágneses dipól-dipól kölcsönhatással modellezhető!

(Cserti József)

14. Két azonos (unobtainium) anyagú és méretű, homogén vezető gömb alakú részecske frontálisan ütközik. A relatív sebesség akkora, hogy az 1. gömb felszínén egyenletesen eloszló Q töltés nem indukál számottevő töltéseloszlást az elektromosan semleges 2. gömbön.
Az unobtainium egyik különleges tulajdonsága miatt kisülés nem történik a két gömb között, töltésáramlás csak érintkezés során jelenik meg. Az ütközés folyamatában az alakváltozás elhanyagolható ideig tart, az érintkezés során mindkét gömb félgömbbé deformálódva alkot egyetlen gömb alakú vezető testet. A töltés-kiegyenlítés folyamata ebben az állapotban zajlik T ideig. A $t = T$ időpont után az érintkezés megszakad, a gömb felezősíkjában lévő töltéseloszlás egyenlően oszlik el a két, már nem érintkező félgömb között.
A $t = 0$ időpontban a Q töltés fele az 1. test külső felszínén oszlik el egyenletesen. Ütközés után a töltések 3:2 arányban oszlanak meg a gömbök között. Nekünk csak annyi a kérdésünk, hogy mennyi ideig tartott az ütközés?

(Gombkötő Ákos)

15. Egy egyetemi hallgató januári kirándulásra készül, miközben tanulja a termodinamikát, amelyből a kirándulást követő napon fog kollokválni. Már elcsodálkozott azon, hogy az entrópiának ugyanaz a mértékegysége, mint a hőkapacitásnak, de most éppen teát készít, és nem akar ebbe mélyen belegondolni. Mégis, miközben a termoszban lévő hideg, 16 °C-os teára rátölt ugyanennyi meleg, 88 °C-osat, a következő kérdés merül fel benne: vajon a hőmérséklet-kiegyenlítődés során bekövetkező entrópianövekedés hányad része lesz a termoszban eredetileg volt tea hőkapacitásának? Segítsünk neki! (Feltételezhetjük, hogy a tea fajhője nem függ a hőmérséklettől, bár ez csak közelítőleg igaz...)

(Radnai Gyula)

16. Egy hagyományos optikai rács rései gyártástechnológiai okokból nem teljesen egyformák. A szomszédos rések középpontjainak távolsága mindenhol ugyanakkora (ez a d rácsállandó), de a rések szélessége véletlenszerűen ingadozik. A résszélesség egy a várható értékű, σ_a szórású, normális eloszlású valószínűségi változó.

a) Milyen a rács elhajlási képe, ha merőlegesen olyan λ hullámhosszúságú lézernyalábot ejtünk rá, amely N rést világít meg?

b) Hogyan módosulna az elhajlási kép, ha az a résszélesség állandó lenne, de a szomszédos rések távolsága egy d várható értékű, σ_d szórású, normális eloszlású véletlen változó lenne?

(Vigh Máté)

17. Egy transzmissziós, nagy felbontású optikai rácsra párhuzamos, monokromatikus fénynyalábot bocsátunk az optikai rácsra merőlegesen. Ezután a rácsot a középső rés, mint tengely körül elforgatjuk akkora szögben, amennyi a rács eredeti állása mellett az n-edik rendben kilépő fénynyaláb eltérülési szöge volt.

a) Milyen irányokban lép ki most fénynyaláb a rácsból?

b) Milyen feltételnek kell teljesülnie a rácsállandó, a hullámhossz és az elforgatási szög között ahhoz, hogy csak a 0-dik és valamelyik első rendben lépjen ki fénynyaláb?

c) Mekkora annak a maximális és minimális hullámhossznak az aránya, ahol az előbbi feltétel teljesül?

(Radnai Gyula és Varga Dezső)

18. Egy külső erőtérben mozgó relativisztikus pontrészecske mozgásegyenlete $d(Mu_k)/d\tau = F_k$, ahol τ a sajátidő, u_k a négyessebesség vektora, M a részecske nyugalmi tömege, F_k pedig a részecskére ható négyeserő vektora. Tanulmányozzuk a részecske mozgását egy rögzített centrum keltette gömbszimmetrikus sztatikus erőtérben! Határozzuk meg a pálya r sugarának függvényében a körpályán való mozgás (hármas)sebességét, valamint a keringési időt rendszeridőben (t), illetve sajátidőben (τ) kifejezve! Vizsgáljuk meg

a) a Higgs-mező esetét, ahol a centrum által kifejtett vonzóerő $F_k = g\,\partial_k\Phi(r)$, konstans g csatolási állandóval, illetve illetve

b) a Nordström-féle gravitációs tér esetét, ahol az erő $F_k = M\,\partial_k\Phi(r)$, a csatolási állandó szerepét (egy gravitációs elméletben elvárható módon) az M nyugalmi tömeg játssza! Mindkét esetben tételezzük fel, hogy a Φ négyesskalár-potenciál sugárfüggése hatványfüggvény jellegű: $\Phi(r) = -K/r^N$, ahol K és N pozitív állandók.

c) A jelenlegi részecskefizikai elméletek szerint bizonyos elemi részecskék tömege teljes egészében a Φ Higgs-mezőtől származik. Hogyan függ egy ilyen részecske pályamenti (hármas)sebessége a körpálya sugarától?

(Dávid Gyula)

19. Egydimenziós, m tömegű, lineáris $V(x) = Fx$ potenciálban mozgó kvantumos részecskét zárjunk L hosszú, merev falú dobozba (a probléma ekvivalens a padló és mennyezet között függőlegesen pattogó kvantum-labdával). A stacionárius Schrödinger-egyenletből kiindulva a határfeltételek figyelembe vételével írjuk fel az energia-sajátértékeket meghatározó egyenletet, melyet oldjunk meg numerikusan! Ábrázoljuk az alacsonyabb nívókat a doboz méretének függvényében, és szemléltessük grafikusan a stacionárius hullámfüggvényeket! Az energiaszinteket meghatározó kifejezésben fellépő függvények aszimptotikáinak ismeretében adjunk egyszerűbb egyenletet a magasan fekvő nívókra! Végezzük el a szemiklasszikus kvantálást is, hasonlítsuk össze az előző közelítő eredménnyel, és numerikusan néhány, az egzakt egyenletből kapott nívóval!

    További kérdések: a) Számítsuk ki a nívókat expliciten, ha az L kicsiny!

    b) Mely paraméterek mellett esik egybe FL éppen az alapállapoti energiával? (Ilyenkor a klasszikus labda éppen eléri a mennyezetet.)

    c) Mutassuk meg, hogy a (b)-beli határesetnél kisebb L belméret mellett minden nívó FL fölé esik!

    d) Írjuk fel a szemiklasszikus stacionárius hullámfüggvényeket, s grafikusan hasonlítsuk össze őket néhány egzakttal – mikor jó a közelítés?

    e) Írjuk fel a kicsiny L melletti hullámfüggvényeket expliciten, ezeket szintén hasonlítsuk össze a valódiakkal!

    (Cserti József és Györgyi Géza)

20. Egy harmonikus oszcillátor a K-ik energia-sajátállapotban van. Ekkor hirtelen megváltoztatjuk a rendszert: az oszcillátor frekvenciáját $e^{2\gamma}$-szorosára változtatjuk (γ tetszőleges valós szám). Fejezzük ki az állapotvektort a változás pillanatában, illetve a változás után t idővel kizárólag az új módosított paraméterű rendszer vákuumállapota és keltő operátora segítségével!

    Válaszoljunk a kérdésre akkor is, ha a rendszer kezdetben nem energia-sajátállapotban, hanem egy β paraméterrel megadott koherens állapotban van (β tetszőleges nem nulla komplex szám)!

    Ha azt szeretnénk tudni, hogy milyen valószínűséggel találjuk a rendszert az új paraméterek alapján meghatározható n-ik energia-sajátállapotban, akkor végtelenszer végtelen számú mátrixelemet kellene kiszámítanunk. Konstruáljuk meg azt a kétváltozós generátorfüggvényt, amelyből mindezek a mátrixelemek egyszerű deriválással levezethetők! Számítsuk ki ténylegesen a valószínűséget abban az esetben, amikor $n = K$!

    Vizsgáljuk meg azt a határesetet, amikor a frekvenciaarányokra jellemző γ paraméterrel 0-hoz tartunk!

    (Dávid Gyula)

21. Az elektronfajhőt minden szilárdtest-fizikai szakkönyv a mintát elszigetelve, állandó elektronszám mellett számolja a Bethe-Sommerfeld-sorfejtést felhasználva. Számoljuk ki ugyanezzel a közelítéssel az állandó Fermi-energiánál mért fajhőt, azaz a leföldelt minta fajhőjét!

    (Tichy Géza)

22. Adiabatikus lemágnesezésnél paramágneses sót használnak. Bekapcsolják a mágneses teret, majd mikor létrehozták a vákuumot az adiabatikus feltételek biztosítására, a teret megszüntetik. Ezzel a só lehűlhet egy kelvin körüli értékről pár millikelvinre. Modellezzük a paramágneses sót független, $\frac{1}{2}$ spinű, paramágneses dipólokkal. Milyen lesz a hőmérséklet mágnesestér-függése a tér adiabatikus csökkenése közben? Mit állíthatunk nagyobb spinnel rendelkező paramágneses sókra?

    (Tichy Géza)

23. A tight-binding modellek rácspontokat összekötő „hopping” tagokból állnak. Vizsgáljunk egy kétdimenziós rácsmodellt, amelynek rácspontjai az xy-síkon helyezkednek el, továbbá jelen van egy z-irányú B_0 homogén mágneses tér is! Ebben az esetben a hopping tagok általános formája:

$$\hat{T}_{m,n} = -\sum_{\mu,\nu} J_{m,n} \exp(i\theta_{\mu,\nu}^{(m,n)}) \hat{c}^{\dagger}_{\mu+m,\nu+n} \hat{c}_{\mu,\nu},$$

ahol $J_{m,n}$ a hopping paramétereket jelöli, a $\hat{c}^{\dagger}_{\mu,\nu}(\hat{c}_{\mu,\nu})$ pedig a keltő(eltüntető) operátorokat a μ, ν indexekhez tartozó rácsponton.

Egy tipikus modell valamilyen reguláris rácson van megadva (pl. négyzetrács, háromszögrács, stb.). A rendszer Hamilton-függvénye $\hat{T}_{m,n}$ típusú tagok és hermitikus konjugáltjaik összege. Például, az $m = 0$, $n = 1$ tag az y-irányban közvetlen szomszédok közötti hoppingot jelöli. A $\theta^{m,n}_{\mu,\nu}$ fázis a vektorpotenciál vonalintegrálja a μ, ν és a $\mu + m, \nu + n$ indexekhez kapcsolódó rácspontok közötti egyenes mentén

$$\theta_{\mu,\nu}^{(m,n)} = \int_{\vec{R}_{\mu,\nu}}^{\vec{R}_{\mu,\nu}+\vec{R}_{m,n}} \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

Definiáljuk a következő rács-derivált függvényt:

$$\Delta_{m,n} f(\mu, \nu) = f(\mu + m, \nu + n) - f(\mu, \nu).$$

- Milyen feltételnek kell ahhoz teljesülni, hogy a $\hat{T}_{m,n}$ és a $\hat{T}_{p,q}$ operátorok kommutáljanak?

Vegyük fel a mágneses transzláció-operátorokat a következő formában:

$$\hat{\mathbb{T}}_{m,n} = \sum_{\mu,\nu} \exp(i\chi_{\mu,\nu}^{(m,n)}) \hat{c}^{\dagger}_{\mu+m,\nu+n} \hat{c}_{\mu,\nu}.$$

A továbbiakban az egyszerű (elsőszomszédos) négyzetrács-modellt vizsgáljuk. Ez azt jelenti, hogy a hopping paraméterek között csak a J_{10} és a J_{01} véges, a többi mind zérus.

- Vezesse le azokat a feltételeket, amelyek a fennállnak, a transzláció-operátorok kommutálnak az egyszerű négyzetrács-modell Hamilton-függvényével! (A kapott egyenletek diszkrét rács-differenciaegyenletek lesznek a $\chi_{\mu,\nu}^{(m,n)}$ és a $\theta_{\mu,\nu}^{(m,n)}$ változók között.)
- Írja fel az egyenletek megoldásait!
- Ellenőrizze, hogy az így kapott mágneses transzláció-operátorok csoportot alkotnak-e! Ha nem, akkor módosítsa őket úgy, hogy csoportot alkossanak!
- Ha a rendszer véges kiterjedésű és a határfeltételek periodikusak (L_x, L_y), akkor építse fel a megfelelő véges mágneses transzláció-csoportot!

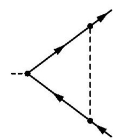
(Hetényi Balázs)

24. Az $a(t)$ skálafüggvény szerint táguló Világegyetemben egy szabad részecske a t_0 pillanatban v_0 sebességgel halad át együttmozgó vonatkoztatási rendszerünk origóján. Mennyi a sebessége egy későbbi t pillanatban?

(Dávid Gyula)

25. Kvantumtérelméletek renormálhatósága szoros kapcsolatban van a szóban forgó rendszerre jellemző szimmetriával. A naiv hatványszámoláson alapuló renormálhatóság általában nem elégséges, az ellentagfunkcionálnak szintén rendelkeznie kell a rendszer szimmetriájával, ellenkező esetben olyan divergenciák is megjelenhetnek, melyekhez nem lehet ellentagot találni a Lagrange függvényben. A mezőkben lineáris szimmetriák esete nagyon egyszerű, ugyanis könnyen megmutatható, hogy ezesetben a Lagrange függvény szimmetriája a kvantum effektív hatáson is megőrződik, vagyis a divergenciák szerkezete konzisztens az ellentagokéval.

Tekintsünk egy $\phi = (\sigma, \pi^a)$ $(a = 1, 2, 3)$ négykomponensű mezőt, mely Yukawa kölcsönhatással csatolódik egy tömegtelen fermion dublethez. A kölcsönhatást a $\mathcal{L}_{\text{int}} = g\bar{\psi}(\sigma + i\pi^a\gamma_5\tau^a)\psi$ tag írja le a Lagrange függvényben (a kinetikus tagok a szokásosak), ahol $\bar{\psi}$ a ψ spinor Dirac adjungáltja, τ^a a Pauli-mátrixokat jelöli, γ_5 pedig az ötödik Dirac-mátrix. A rendszerről megmutatható, hogy $O(4)$ szimmetriával rendelkezik, mely lineárisan ábrázolódik a mezőkön, vagyis az ellentag funkcionál szerkezete meg kell, hogy egyezzen a Yukawa tagéval. Számítsuk ki a δg ellentagot a perturbációszámítás legalacsonyabb rendjében, azaz értékeljük ki az alábbi Feynman-gráfot (az irányított vonalak fermionok, a szaggatottak ϕ-re vonatkoznak).



Ha a szaggatott külső láb σ, akkor az alsó fermion propagátortól indulva a gráf járuléka sematikusan

$$i\delta g = \int_p S(p) \times ig \times S(p) \Big[(ig)^2 + (ig \times i\gamma_5\tau^b)^2 \Big] G(p),$$

míg ha az előbbi π^a, akkor

$$i\delta g \times i\gamma_5\tau^a = \int_p S(p) \times ig \times i\gamma_5\tau^a \times S(p) \Big[(ig)^2 + (ig \times i\gamma_5\tau^b)^2 \Big] G(p),$$

ahol S a fermion, G pedig a ϕ propagátor. Mivel $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ (és így $\{S, \gamma_5\} = 0$), a két esetben a δg -re adódó járulék egy előjelben eltér egymástól. Eszerint az ellentagfunkcionálban egy $\sim \bar{\psi}(\sigma - i\pi^a\gamma_5\tau^a)\psi$ operátor jelenik meg, ami viszont sérti a korábbi $O(4)$ szimmetriát és nem kompatibilis a Lagrange függvénnyel. Hol vétünk hibát a gráfokhoz tartozó integrálok felírása során? Spontán szimmetriasértés esetén milyen más gráfból lehetne meghatározni δg-t?

(Fejős Gergely és Szép Zsolt)

26. Tegyük fel, hogy feltérképeztük a Balaton mélységét vízfelületének minden pontjában, és ezt a $D(x, y)$ függvény írja le, ahol az (x, y) koordinátájú pont a tópart körvonalán belül található. Levezethetők-e a következő információk a $D(x, y)$ függvény pontos ismeretéből?

a) Mi a leggyakrabban előforduló mélység, azaz a mélység eloszlásfüggvényének módusza? b) Hogyan lehet definiálni és meghatározni az átlagos mélységet? c) Hogyan vezethető le a $D(x, y)$ függvényből a z mélységeloszlás $f(z)$ sűrűségfüggvénye (ahol $f(z)\,dz$ annak a valószínűsége, hogy egy véletlen mérésnél a z mélység értéke a $[z, z + dz]$ intervallumba esik)? Le lehet-e egyáltalán vezetni az $f(z)$ sűrűségfüggvényt? d) Mekkora a medián mélység, ami elválasztja a tó térfogatának felső felét az alsó felétől? e) Hol van a tó súlypontja, ha z mélységben a víz sűrűsége $\varrho(z)$? f) Mekkora az a medián mélység, amely elválasztja a víz tömegének felső felét az alsó felétől? g) Hogyan lehet kiszámítani a z mélység $< z >= \int z f(z) dz$ „várható értékét”?

Természetesen feltételeztük, hogy a tó medrének alakja konvex (mélyebben kisebb a keresztmetszete). Mi a helyzet, ha a meder konkáv (lefelé szélesedik)?

Ha a fenti kérdéseket nem lehet általánosságban analitikusan kezelni, válaszoljunk ebben a két speciális esetben: α) A tó félgömb alakú, felül a lapos felülettel (tál alakú). β) A tó félgömb alakú, alul sík felülettel (harang alakú).

(Glöckler Oszvald)

27. LaposFöld lakói nem hiszik, hanem tudják, hogy tökéletes síklapon élnek. Hiszen ellátnak a széléig... A felszínt jég borítja, felette igen tiszta a levegő, és élesen kirajzolódik a hatalmas sík távoli Pereme, így mindenki a saját szemével láthatja, hogy a lakható sík szabályos négyzet alakú, ők pedig a Négyzet középpontja körül élnek, ahová egy titokzatos erő mindig visszahúzza őket. A bolygó pontos alakján ősidők óta vitatkoznak a filozófusok. Azon persze nincs vita, hogy (amint az ősi legenda tartja), LaposFöldet a Repülő Spagettiszörny készítette jégkockának a koktéljához, de aztán valahogy kicsúszott a kezéből, és azóta kóborol az űrben. A kérdés a jégkocka alakja. Abban mindenki egyetért, hogy a bolygó négyzet alapú hasáb alakú. De mekkora a vastagsága? A kockológusok azt állítják, hogy az általuk lakott négyzetre merőleges irányban a bolygó mérete ugyanakkora, mint a lakott négyzet oldala, így a bolygó szabályos jégkocka – hiszen mi is lehetne más? A lemezpártiak szerint viszont a bolygó négyzetükre merőleges vastagsága elhanyagolható a négyzet oldalához képest – hiszen egy négyzetlap épp elegendő ahhoz, hogy a laposföldiek benépesíthessék. A kérdés eldöntésére már számos expedíciót szerveztek. Az volt a terv, hogy a kutatók eljutnak a Peremig, és azon átmászva felderítik a egyik szomszédos, az ő életsíkjukra merőlegesen álló lapot, megmérve annak pontos méretét. Sajnos a felszínt borító jég eddig minden expedíciót kudarcra kárhoztatott: a kutatók az igen kicsiny, gyakorlatilag elhanyagolható súrlódású jégen mindig visszacsúsztak a Perem felé egyre meredekebben emelkedőnek érzett lejtőről.

A Perem felől visszatérő, a Négyzet közepén épült főváros, LapCentrál felé kullogó sikertelen expedíciók tagjai mindig összetalálkoztak a Bátrakkal. Ők azok a városlakók, akik nem félnek a várost övező jégmezőktől, és amennyire csak tudnak, eltávolodnak a központtól, majd merőleges irányba ellökve magukat, korcsolyájukon sokáig keringenek a város körül. Régi sportolói tapasztalat, hogy a különböző pályákon csúszkáló Bátrak keringési ideje független attól, mennyire távolodtak el a várostól.

Amikor a tudósok sok kudarc után rájöttek arra, hogy a Peremre vezetett expedíciókkal soha sem dönthetik el a bolygó alakjára vonatkozó ősi kérdést, más módszer után néztek. Pályázatot hirdettek a bolygó alakjának lokális mérésekkel történő meghatározására. A méréseket a négyzet középpontjához közel, LapCentrál környékén kellett elvégezni.

A pályázatot egy névtelenségbe burkolózó, MitTudomÉn jelige mögé rejtőző fizikus kollektíva nyerte meg. A pályázati pénzből ingákat, órákat, üveghengereket, ásókat, csákányokat és mérlegeket vásároltak. A város közepén felállított magas oszlopra egy ingát lógattak, a csoport más tagjai stopperrel méricskélték a város körül korcsolyázó Bátrak keringési idejét. A kutatók harmadik csoportja pedig csákányozni kezdte a jeget. Mindenki nagy meglepetésére nem túl nagy mélységben furcsa szürke anyagra (ők „kőnek” nevezték) bukkantak. Állításuk szerint a bolygót a vékony felszíni jégrétegtől eltekintve mindenütt ez az anyag alkotja. A tudósok homlokukat ráncolva méricskélték mérlegeikkel a kődarabok súlyát, a vízzel töltött mérőhengerekbe dobálva őket pedig térfogatukat is igyekeztek meghatározni.

A kutatócsoport zavaros történetet adott elő arról, hogy sikerült felfogniuk egy távoli égitest, a „gömbölyű Föld” lakóinak üzenetét, és mérési eredményeiket meg is osztották az idegen civilizációval. Hamarosan fény derült a két merőben különböző bolygó tulajdonságai közti kísérteties hasonlóságra. A LapCentrálban felállított inga lengési ideje pontosan megegyezett a távoli „gömbölyű Föld” északi sarkán lengő, azonos hosszúságú inga periódusidejével. A város körül korcsolyázó Bátrak pedig pontosan ugyanannyi idő alatt kerülték meg a várost, mint amennyi idő alatt a „gömbölyű Föld” lakóinak állítása szerint az általuk alkotott szerkezet, az „egyenlítői műhold” körbejárta bolygójukat. Végül pedig mindenki nagy meglepetésére az is kiderült, hogy a jég alól kibányázott „kő” sűrűsége pontosan megegyezett a távoli „gömbölyű Föld” átlagos sűrűségével.

A kutatók ezek után könnyedén meghatározták LaposFöld pontos méreteit, beleértve a négyzetes hasáb vastagságát, eldöntve a filozófusok ősi vitáját. Sajnos az eredmény publikálása után fellángoló újabb filozófiai és politikai perpatvar közepette elfelejtették megüzenni nekünk, a távoli „gömbölyű Föld” lakóinak, hogy mire is jutottak.

Így hát rátok, a 2020. évi Ortvay-verseny résztvevőire maradt LaposFöld méreteinek meghatározása. Kérjük megadni a Négyzet élét és a hasáb magasságát a „gömbölyű Föld” sugarának számszorosaként kifejezve. Egzakt eredményt várunk! Utána persze az eredményt numerikusan is kiszámíthatjátok. Legyetek szerencsésebbek a szerencsétlen Peremkutatóknál, és bátrabbak a Bátraknál!

(Cserti József és Dávid Gyula)

28. A hetvenes évek elején, amikor Tichy Géza és Major János megalapította az Ortvay-verseny elődjét, az ELTE TTK Fizikus Diákkörének problémamegoldó versenyét, még nem volt internet, és fénymásolási lehetőség sem állott a fizikus hallgatók rendelkezésére. Ezért a versenyfeladatokat egy kézzel írott lapon kitűzték a faliújságra, a tábla előtt álló hallgatók kézzel jegyezgették le maguknak a feladatokat. (Később fejlődött a technika, néhány év múlva már stencilezett lapokon kaptuk meg a feladatokat, az írógéppel lekopogott lapokra a képleteket kézzel, kifogyott golyóstoll hegyével karcolták be.)

1970 őszén, néhány nappal az első (akkor még nem Ortvay-) verseny kezdőnapja előtt 36 izgatott fizikushallgató (akkor csak ekkorák voltak az évfolyamok) tolongott a lépcsőház kanyarulatában a faliújság előtt. Az abban az évben indult Vektorszámítás tárgy beadandóját jegyzetelték füzetükbe. A feladat egy hat egyenletből álló, hatismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldása volt Gauss-eliminációval. Az egyenletrendszer együtthatói és a jobb oldalon álló konstansok mind egyjegyű egész számok voltak, pozitív és negatív előjellel, nulla nem szerepelt köztük. A tárgy oktatója azt szerette volna, hogy minél több hallgató vegyen részt a fizikaversenyen, ezért eleve olyan feladatot tűzött ki, amelynek feldolgozása során a Gauss-eliminációs algoritmus néhány lépés után ellentmondáshoz vezet, tehát azonnal tudható, hogy a problémának nincs megoldása, a hallgató leteheti a tollat, és mehet a versenyproblémákon töprengeni.

Igen ám, de a folyosói tolongás nem nagyon alkalmas az információ pontos átvitelére... Az egyenletrendszer leírása során a hallgatók mind hibáztak – mégpedig mindegyikük pontosan egy együttható előjelét írta le tévesen (és érdekes módon mindegyikük másik együtthatóét). Az egyenletrendszer jobb oldalán álló számokat viszont szerencsére mindegyiküknek sikerült hiba nélkül rögzítenie. Így aztán az eredetileg kitűzött egyszerű feladat helyett mindenki hosszú és bonyolult számolásba bonyolódott, egyre idegesebben, mert már nagyon szeretett volna az érdekes fizikai versenyfeladatokkal foglalkozni.

Az oktató megrökönyödve nézte a több oldalas csúf számolásokat. Csak akkor derült fel az arca, amikor az egyik dolgozat néhány lépés után arra a következtetésre jutott, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása. Pedig – mint később kiderült – ez a hallgató is elnézett egy előjelet a feladat leírásakor.

Kérdésünk az, mekkora a valószínűsége annak, hogy akad olyan a hallgatók között, aki – az együttható előjelhibája ellenére – erre az eredményre jut.

Természetesen feltételezhetjük, hogy a fizikushallgatók (bár másolni nem nagyon tudnak) a számolás során sohasem követnek el sem elvi, sem numerikus hibát. Mert a fizikus a FEJ, FEJ, FEJ!

(Dávid Gyula)

\end{document}